

مروری بر جایگاه ریاضیات در پایدارسازی سیستم های مالی آشوبناک

اعظم افزلی^۱، حنیف حیدری^۲

^۱ سمنان، دامغان، دانشگاه دامغان

^۲ سمنان، دامغان، دانشگاه دامغان

نام و نشانی ایمیل نویسنده مسئول:

اعظم افزلی

Azamafzali17@gmail.com

چکیده

ثبات اقتصادی و پایداری بازار سرمایه از ارکان اقتصاد پویا محسوب می شود. فعالان اقتصادی تمایلی به سرمایه گذاری در بازار آشوبناک ندارند. هدف این مقاله بررسی سیستم های مالی آشوبناک و کنترل بهینه آن می باشد. سیستم مالی معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری، برای مدلبندی سیستم مالی در نظر گرفته شده است. از سه الگوریتم بهینه سازی چند هدفه NSGA-II و ev-MOGA و MOEA/D جهت پایداری سازی سیستم های مالی استفاده شده است. نتایج نشان می دهد که الگوریتم MOEA/D دقت بالاتری نسبت به سایر الگوریتم ها دارد و روشی مناسب جهت پایداری سازی آشوب سیستم های مالی می باشد.

واژگان کلیدی: آشوب، سیستم های مالی آشوبناک، معادلات دیفرانسیل کسری، بهینه سازی چندهدفه.

مقدمه

امروزه با رشد چشمگیر شرکت های خدماتی و تولیدی رو به رو هستیم. هدف اصلی شرکت ها، داشتن سهم قابل توجهی در اقتصاد و سود دهی مناسب می باشد. با توجه به افزایش آنها، رقابت شدیدی در بین شرکت های همسان وجود دارد. در این رقابت ها شرکتی موفق خواهد شد که ارزیابی دقیقی از بازار و روند حاکم داشته باشد. با توجه به افزایش آنها، رقابت شدیدی در بین شرکت های همسان وجود دارد. در این رقابت ها شرکتی موفق خواهد شد که ارزیابی دقیقی از بازار و روند حاکم داشته باشد. با توجه به رشد سریع تکنولوژی های ارتباطی و فناوریهای نوین، عناصر تاثیر گذار بر اقتصاد متعدد گشته و چگونگی تعیین روند بازار بسیار پیچیده شده است. از این رو مدلسازی دقیق ریاضی فرایند بازار و تحلیل آن امری ضروری می باشد. از جمله پژوهش های انجام شده می توان به طراحی مدل برای اعتبار بندی شرکت ها، بهینه سازی سبد سهام([11])، مدیریت و حفاظت منابع آب و محیط زیست([15])، بهینه سازی سبد تسهیلات اعطایی موسسات مالی([13]) اشاره کرد.

استفاده بهینه از امکانات موجود و تعیین صحیح خط مشی آینده به عنوان عناصر مهم مدیریتی شناخته می شود([12])، یک مدیر کارآمد بایستی اشراف کامل بر محیط تحت مدیریت خود داشته، برنامه ریزی مناسب انجام داده و تحلیل صحیحی از رخدادهای آینده داشته باشد. برای هر کدام از این موارد مدلسازی و روشهای ریاضی ارایه خواهد شد([16]). در مورد رخدادهای آینده نیز از روش هایی مانند سریهای زمانی([1])، رگرسیون([10]) استفاده می کنند. اما در روش های ذکر شده بحث تاثیر عوامل بیرونی بر عملکرد سیستم و آشوبناک بودن وضع اقتصادی و روند بازار لحاظ نشده است. در دنیای واقعی اغلب سیستم های اقتصادی رفتاری آشوبناک دارند. لذا عوامل متعدد حتی کوچک، تاثیر به سزایی در خط سیر اقتصاد داشته و پیش بینی روند بازار به سادگی امکان پذیر نخواهد بود. در این مقاله سیستم مالی را در نظر می گیریم که مدل ریاضی روند آن موجود و آشوبناک است. سپس با ابزار بهینه سازی چندهدفه سعی در کنترل آشوب و در نتیجه مدیریت مناسب سیستم داریم. ادامه مقاله به شرح زیر می باشد:

مفهوم آشوب را در بخش دوم معرفی خواهیم نمود، در بخش سوم روش ریاضی حل را تشریح داده و در بخش چهارم نتایج عددی بیان خواهد شد. در انتها نتیجه گیری و پیشنهاداتی برای ادامه کار ارائه می دهیم.

۱. حسابان کسری

حسابان کسری با قدمتی بیش از ۳۰۰ سال شاخه ای از علم ریاضیات است که امروزه به انتگرال و مشتقگیری از هر مرتبه ی دلخواه به طوریکه مرتبه مشتق بتواند گویا، گنگ و حتی مختلط باشد، تلقی می گردد. در طول سه دهه گذشته به دلیل کاربرد وسیع آن در علوم مختلف و مهندسی، روز به روز بر محبوبیت مبحث حسابان کسری افزوده شده است([14]). می دانیم یکی از ابزار تحلیل پدیده های طبیعی، معادلات دیفرانسیل است. این معادلات که می تواند به صورت جزئی یا معمولی باشند. چارچوب تحلیل قوی ای برای همه ی دانشمندان علوم طبیعی فراهم می کنند. معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری که حالت کلی تری از معادلات دیفرانسیل معمولی هستند می تواند با ابزار ریاضی قوی تری به حل مسایل مختلف بپردازند. عملگر مشتق و انتگرال کسری خاصیت غیر موضعی دارند و به همین دلیل می تواند فرایند های حافظه دار و دارای ویژگی وراثتی را به خوبی فرمولبندی کنند. پیچیده بودن ذات حساب کسری سبب تحلیل آسانتر پدیده هایی با پیچیدگی زیاد می شود. مبدا حسابان کسری را باید در قرن ۱۷ به لایب نیتز و هوپیتال نسبت دهیم. تعاریف مختلفی از مشتق و انتگرال کسری وجود دارد که منشا متفاوتی دارند و لزوما هم معادل یکدیگر نیستند.

روش های محاسبه ی مشتق مرتبه کسری شامل استفاده از تعریف انتگرال کسری برای تعریف مشتق کسری و یا تعمیم مشتق معمولی به مشتق کسری می باشد. در اینجا ما به ذکر دو نوع معروف آن، یعنی انتگرال و مشتق کسری ریمان لیویل، مشتق کسری کاپوتو که با استفاده از انتگرال کسری تعریف می شوند، می پردازیم.

انتگرال و مشتق کسری ریمان لیویل

انتگرال کسری ریمان -لیویل که تعمیمی از دو نوع انتگرال گیری زیر می باشد از جمله تعاریف مهم انتگرال مرتبه کسری می باشد.

$$(I_a^n f)(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (1)$$

$$(I_b^n f)(x) = \int_x^b dt_1 \int_{t_1}^b dt_2 \dots \int_{t_{n-1}}^b f(t_n) dt_n = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^x (t-x)^{n-1} f(t) dt \quad (2)$$

حال اگر $n \in \mathbb{N}$ به هر عدد دلخواه $\alpha \in \mathbb{C}$ تعمیم یابد، به تعریفی از یک انتگرال کسری دست می یابیم. فرض می کنیم $[a, b]$ بازه ای متناهی بر روی خط اعداد حقیقی باشد و $R(\alpha)$ قسمت حقیقی عدد α باشد.

تعریف ۱-۲: انتگرال های مرتبه کسری ریمان - لیویل (سمت چپ) I_{a+}^{α} و (سمت راست) I_{b-}^{α} مرتبه α که $\alpha \in \mathbb{C}$ ($R(\alpha) > 0$) به صورت زیر تعریف می شوند:

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (x > a) \quad (3)$$

$$(I_{b-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt \quad (x < b) \quad (4)$$

که در آن $\Gamma(\cdot)$ نشان دهنده تابع گاما می باشد. در مشتق مرتبه کسری ریمان - لیویل ابتدا انتگرال مرتبه کسری گرفته می شود و سپس از تابع به دست آمده مشتق مرتبه صحیح گرفته می شود که در نهایت به یک مشتق کسری خواهیم رسید.

تعریف ۲-۲: مشتق مرتبه کسری $\alpha(\alpha \in \mathbb{C}, R(\alpha) \geq 0)$ ریمان - لیویل سمت چپ و راست به صورت زیر تعریف می شود:

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \quad (x > a) \quad (5)$$

$$(D_{b-}^{\alpha} y)(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{b-}^{n-\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{y(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt \quad (x < b) \quad (6)$$

که در آن $n = [R(\alpha)] + 1$

مشتق مرتبه کسری کاپوتو

کاپوتو تعریف اولیه ریمان - لیویل از مشتق مرتبه کسری را به منظور حل معادلات دیفرانسیل با مرتبه کسری بازنویسی نمود. او برخلاف تعریف مشتق گیری ریمان - لیویل ابتدا مشتق صحیح و سپس انتگرالگیری کسری را روند کار خود قرار داد.

تعریف ۲-۳: فرض کنید $[a, b]$ یک بازه متناهی بر روی خط اعداد حقیقی باشد و $f \in AC^n[a, b]$ که در آن فضای توابعی $AC^n[a, b]$ است که مشتق مرتبه $(n-1)$ ام آنها بر روی $[a, b]$ مطلقاً پیوسته می باشند. مشتقات مرتبه کسری سمت چپ و راست کاپوتو از مرتبه $\alpha(\alpha \in \mathbb{C}, R(\alpha) \geq 0)$ بر روی بازه $[a, b]$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$({}_c D_{a+}^{\alpha} y)(x) = D_{a+}^{\alpha} [y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k](x) \quad (7)$$

$$({}_c D_{b-}^{\alpha} y)(x) = D_{b-}^{\alpha} [y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k](x) \quad (8)$$

که در آن $n = [R(\alpha)] + 1$ برای $\alpha \notin \mathbb{N}$ و $n = \alpha$ برای $\alpha \in \mathbb{N}$ و D^{α} مشتق مرتبه α ریمان - لیویل می باشد. بنابراین رابطه بین دو مشتق کسری کاپوتو و ریمان - لیویل به صورت زیر است:

$$(cD_a^\alpha y)(x) = (D_a^\alpha y)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha} \quad (9)$$

$$(cD_b^\alpha y)(x) = (D_b^\alpha y)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (b-x)^{k-\alpha} \quad (10)$$

مشاهده می شود که ارتباط تنگاتنگی بین نوع مشتق مرتبه ی کسری و نوع شرایط اولیه آن وجود دارد. در واقع دلیل انتخاب مشتق مرتبه ی کسری کاپوتو در مدل بندی پدیده های فیزیکی از این حیث می باشد و مشتق مرتبه کسری ریمان-لیویل بیشتر در ریاضیات محض استفاده می شود.

در مشتق مرتبه کسری ریمان-لیویل، نوع شرایط اولیه مساله در عمل در دسترس نمی باشد زیرا که تعبیر فیزیکی مشتق کسری در شرایط اولیه برای ما شناخته شده نیست. ولی هنگامی که ما با مشتق مرتبه کسری کاپوتو سروکار داریم؛ شرایط تغییر می کند. شرایط اولیه این نوع مشتق، از نوع مشتقات مرتبه ی صحیح می باشد که مزیت برای این نوع مشتق محسوب می شود. این نوع مشتق گیری کاربردهای بسیاری در مدل بندی پدیده های دنیای واقع دارد، زیرا که در عمل شرایط اولیه ای در قالب مشتقات مرتبه ی صحیح، دست یافتنی تر و شناخته شده تر می باشد.

۲. آشوب در سیستم های مالی

مفهوم آشوب یکی از مفاهیم جدید و بنیادی علم نوین است که بینش جدیدی از دنیای واقع را به ما ارائه می دهد. امروزه با کشف آشوب در رفتار بسیاری از پدیده های دنیای پیرامون، توجه بسیاری از محققین به این مفهوم جلب شده است. تشخیص وجود یا عدم وجود آشوب در یک سیستم پویا مسئله مهمی است که گستره کاربرد آن از بی نظمی های نوسانات قلبی تا مساله پایداری منظومه شمسی را در بر می گیرد. از جمله این روشها می توان به تخمین بزرگترین مولفه لیاپانوف سیستم و روش بصری مشاهده رفتار فازهای سیستم اشاره کرد. بررسی پدیده ی آشوب را به کار ریاضیدان فرانسوی هنری پوانکاره در شروع قرن بیستم نسبت داده اند. وی در حین مطالعه روی مدار سه جرم سماوی که به یکدیگر نیروی جاذبه وارد می کردند، با در نظر گرفتن رفتار حرکتی آنها با توجه به نقاط شروع اولیه متفاوت، نشان داد که این سیستم می تواند حرکت های خیلی پیچیده ای را تجربه کند که امروزه به آن آشوب گفته می شود. نظریه آشوب، گسترش خود را بیشتر مدیون کارهای هنری پوانکاره و ادوارد لورنز می باشد. اهمیت و لزوم بررسی پدیده ی آشوب از آن جهت می باشد که انگیزه های لازم و قوی به منظور تجزیه و تحلیل این پدیده ی غیر خطی باعث روشن شدن زمینه های حضور و ظهور آشوب و همچنین تاثیرات آن بر عملکرد سیستم ها خواهد شد. ([14])

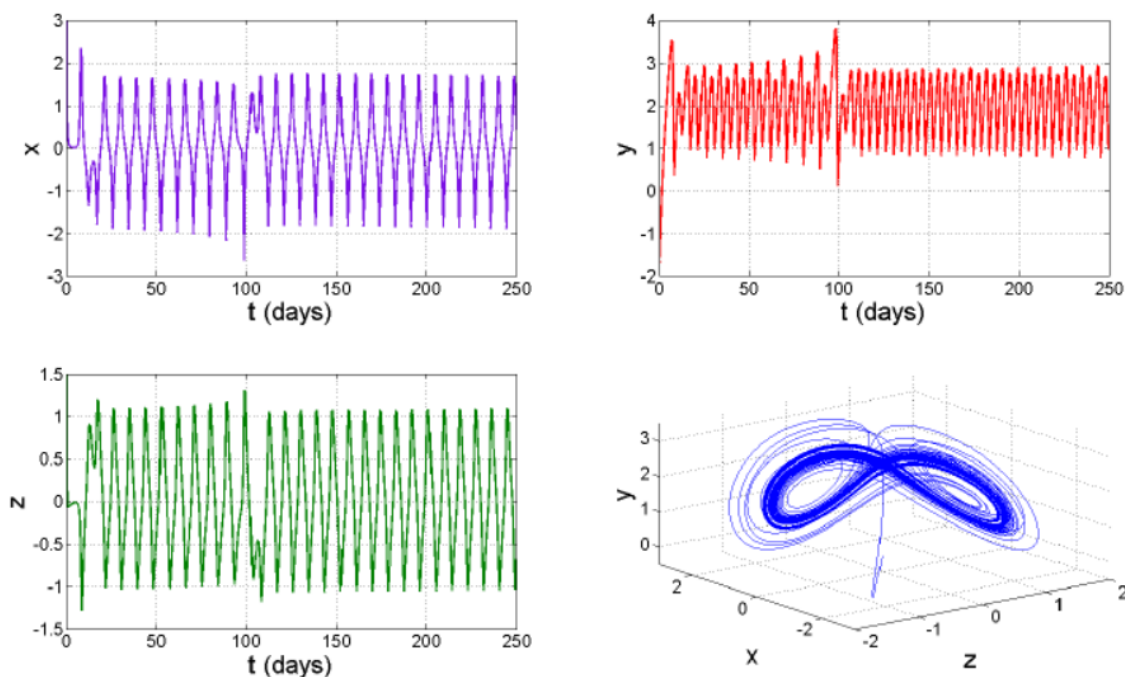
پدیده ی آشوب، در سیستم های پویا رخ می دهد. سیستم های پویا به سیستم هایی گفته می شود که در گذر زمان دستخوش تحول می شوند. یک سیستم پویا را می توان توسط سه پارامتر زمان، حالت ها و قاعده هایی که بیانگر نحوه تحول این سیستم هاست، شکل داد. یک سیستم پویا شامل یک فضای فاز یا حالت فازی است که مختصاتش، حالت دینامیکی سیستم را با به کارگیری قوانین دینامیکی مشخص می کند. برای مثال سیستم مالی آشوبناک مرتبه کسری^۱ زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \frac{dq_1x}{dt} &= z + (y-a)x \\ \frac{dq_2y}{dt} &= 1 - by - x^2 \\ \frac{dq_3z}{dt} &= -x - cz \end{aligned} \quad (11)$$

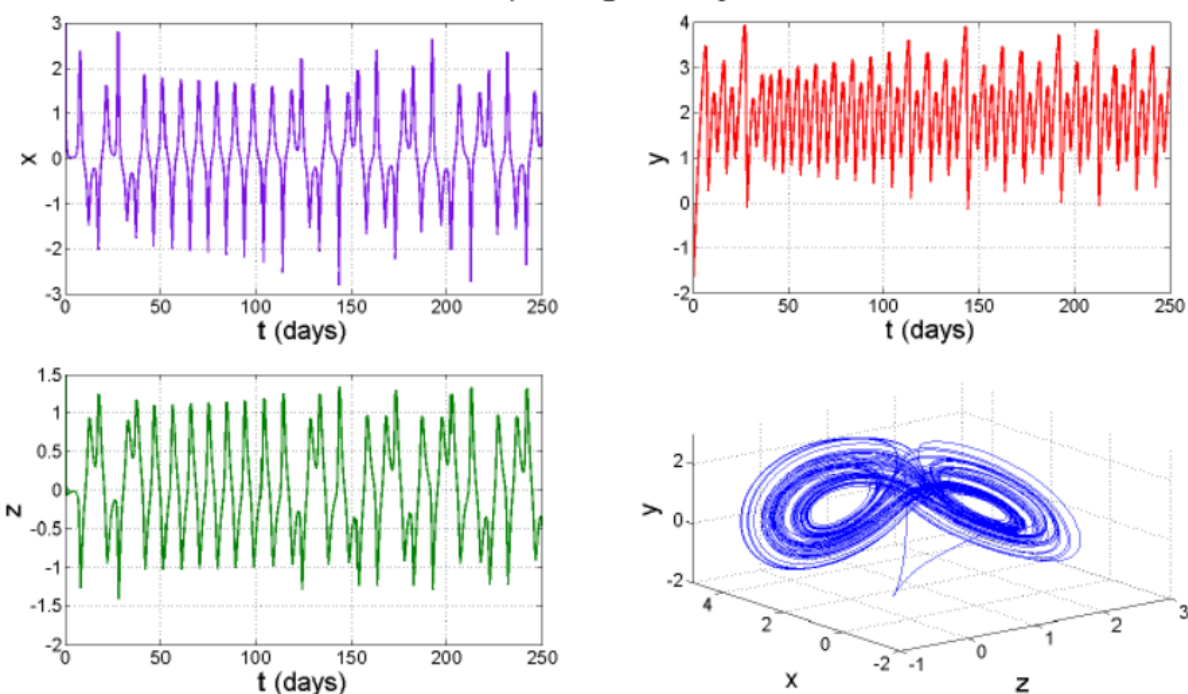
متغیرهای x ، y و z به ترتیب برای نمایش نرخ سود، تقاضای سرمایه گذاری و نرخ نمای یک سیستم مالی تعیین می شوند. متغیر x که روی نرخ سود می تواند تاثیر بگذارد، بوسیله ی مازاد بین سرمایه گذاری و پس انداز مطابق نرخ تعیین می شود. متغیر y ، متناسب با نرخ سرمایه گذاری و وارونگی با هزینه سرمایه گذاری و نرخ سود می باشد. متغیر z ، به تفاضل بین تحویل دادن و تقاضا کردن در مرکز تجارت می پردازد و همچنین به وسیله ی نرخ تورم تحت تاثیر قرار می گیرد ([6]).

¹ Fractional Order

ضرایب ثابت $\{a, b, c\}$ مبلغ سود، هزینه برای هر سرمایه گذاری و کشش تقاضا کردن مرتب بازارهای تجاری را نمایش می دهند [8]. شکل (1) و (2) ناپایداری ها در سه متغیرهای نمایش داده شده یعنی نرخ سود، تقاضای سرمایه گذاری و نرخ نما با زمان برای معادله (11) را به ترتیب سیستم مالی مرتبه کسری متناسب و نامتناسب را نشان می دهد [8]. سریهای زمانی هر دو سیستم نمایش دهنده نوسان نامنظم سیستم ها می باشد که منجر به فضای فاز آشوبناک می شود. دومین متغیر تعریف شده (تقاضای سرمایه گذاری)، نوسان سریع تری از سایر متغیرها دارند. دانشمندان مدلبندی تصادفی از سیستم های مالی را به منظور اعمال کنترل و بهبود عملکرد سیستم ارایه داده اند. با این حال استفاده از سیستم های قطعی آشوبناک مالی در عمل از اقبال بیشتری برخوردار می باشند.



شکل ۱. تصویر فاز و منحنی حالت سیستم مالی متناسب مالی مرتبه کسری با رتبه $q_1 = q_2 = q_3 = q = 0.9$



شکل ۲. تصویر فاز و منحنی حالت سیستم مالی نامتناسب مرتبه کسری با رتبه $q_1 = 0.9, q_2 = 0.95, q_3 = 0.8$

۳. روش ریاضی برای حل مساله آشوب در سیستم مالی

به منظور کنترل سیستم (11)، سه تابع کنترل فعال u_1, u_2, u_3 ، در نمایش سیستم (11) را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \frac{dq_{1x}}{dt} &= z + (y - a)x + u_1(t) \\ \frac{dq_{2y}}{dt} &= 1 - by - x^2 + u_2(t) \\ \frac{dq_{3z}}{dt} &= -x - cz + u_3(t) \end{aligned} \quad (12)$$

تابع های کنترل بازگشتی نمایش داده شده را به صورت غیرخطی در نظر گرفته و توسط روابط (13)-(15) به منظور ساختن حلقه بسته کنترل سیستم خطی معرفی می شود.

$$u_1(t) = v_1(t) - xy \quad (13)$$

$$u_2(t) = v_2(t) - 1 + x^2 \quad (14)$$

$$u_3(t) = v_3(t) \quad (15)$$

توابع $v_i(t) \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$ وابسته به سه متغیر حالت $\{x, y, z\}$ می باشند با استفاده از معادلات (13)، (14) و (15) و با

جایگذاری آن در معادله (12)، داریم:

$$\begin{aligned}\frac{d^{q_1}x}{dt} &= z - ax + v_1(t) \\ \frac{d^{q_2}y}{dt} &= -by + v_2(t) \\ \frac{d^{q_3}z}{dt} &= -x - cz + v_3(t)\end{aligned}\quad (16)$$

توابع کنترل فعال (۱۷) را به صورت زیر تعریف می کنیم که در آن $m_{ij} \quad \forall i, j \in \{1,2,3\}$ اعداد ثابت می باشند.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (17)$$

بنابراین (16) و (17) وقتی که $q = [q_1, q_2, q_3]^T \in (0,2)$ ، معادله (18) را نتیجه می دهند:

$$D^q \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a + m_{11} & m_{12} & 1 + m_{13} \\ m_{21} & -b + m_{22} & m_{23} \\ -1 + m_{31} & m_{32} & -c + m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (18)$$

با توجه به وجود جملات درجه دوم و ضرب داخلی در ورودیهای کنترل فعال معادلات (15)-(13)، توابع کنترل معرفی شده بازگشتی غیرخطی برای سیستم های مرتبه کسری متناسب و نامتناسب می باشند. این نوع کنترل باعث خطی شدن سیستم تحت بررسی و در نتیجه ساده تر شدن آنالیز پایداری می شود. آنالیز پایداری برای سیستم های غیر خطی بسیار پیچیده است. از این رو ممکن است برای ساختن یک کنترل مناسب وقتی که هرکدام از سیگنالهای کنترل یک تابع که توسط خودمان به تنهایی و نه متغیرهای دیگر نمایش داده می شود، قطری شود. این باید وابستگی معادلات را کاهش دهد و پیچیدگی در پردازش برنامه را ساده کند. تعداد اعضا به جای ۹ باید ۳ انتخاب شود تا هزینه عمومی الگوریتم بهینه سازی را کاهش دهد. اما در موارد زیادی مقادیر ویژه بدست آمده از یک نتیجه از قبیل قطری ممکن است مزدوج مختلط باشد و بنابراین تحقق فیزیکی از قبیل کنترلگرهای بازگشتی بیان شده حلقه مختلط نشدنی باشد. از این رو همه ی ۹ مولفه با استفاده از بهینه سازی در (۱۷) انتخاب می شوند.

دستگاه معادلات دیفرانسیل دوتایی آشوبناک با استفاده از روش توسعه سریهای توانی می تواند شبیه سازی عددی شود. در [9] معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری آشفته در (۱۹) می تواند در شکل یک مجموعه معادلات انتگرال پذیر همچون (۲۲) نوشته شود و نوار محدود شده تقریباً گویا می تواند برای توضیح دیفرانسیل های کسری استفاده شود. این روش در مقاله حاضر جهت شبیه سازی سیستم آشفته مرتبه کسری برای یک مجموعه معادلات دیفرانسیل کسری دو تایی به شکل (19) پذیرفته شده است.

$$\begin{aligned}_0D_t^{q_1}x(t) &= f(x(t), y(t), z(t)) \\ _0D_t^{q_2}y(t) &= g(x(t), y(t), z(t)) \\ _0D_t^{q_3}z(t) &= h(x(t), y(t), z(t))\end{aligned}\quad (19)$$

با در نظر گرفتن رابطه خطی ذیل یعنی :

$$_0D_t^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}_aD_t^\alpha f(t) + \mu {}_aD_t^\alpha g(t) \quad (20)$$

و تبدیل مشتق مرتبه کسری به مشتق مرتبه صحیح یعنی:

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_a D_t^\alpha) = {}_a D_t^\alpha \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_a D_t^{\alpha+n} f(t) \quad (21)$$

تساوی (۱۹) می تواند همچنین در شکل تساویهای انتگرال پذیر مثل (۲۲) نوشته شود:

$$\begin{aligned} x(t) &= {}_0 D_t^{1-q_1} \left(\int_0^t [f(x(t), y(t), z(t))] dt \right) \\ y(t) &= {}_0 D_t^{1-q_2} \left(\int_0^t [g(x(t), y(t), z(t))] dt \right) \\ z(t) &= {}_0 D_t^{1-q_3} \left(\int_0^t [h(x(t), y(t), z(t))] dt \right) \end{aligned} \quad (22)$$

با پیاده سازی این تبدیل در محیط مبنی بر Matlab/Simulink سیستم های آشوبناک مرتبه کسری قابل شبیه سازی است ([9]). مقادیر انتگرالهای مختلف مرتبه کسری مانند $\{1-q_1, 1-q_2, 1-q_3\}$ با تخمین معقول مرتبه پنجم استالوپ^۲ توجیه شده است ([7]). انتگرالهای مختلف مرتبه کسری برای شبیه سازی لازم هستند. در شبیه سازی حاضر مطالعه هر عضو مرتبه کسری با فیلتر بازگشتی استالوپ به صورت معادلات (۲۲) و (23) توجیه شده است ([7]). اگر به طور فرضی پیش بینی کرده باشیم که برد مناسب یا برد تناوبی عملگر کنترلگر $\{\omega_b, \omega_h\}$ باشد. پس می توان فیلتر مرتبه بالاتر که عنصر مرتبه کسری، S^α را به صورت زیر نوشت ([3]).

$$G_f(s) = s^\alpha = K \prod_{k=-N}^N \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k} \quad (23)$$

که در آن قطبها، صفرها و سود فیلتر از رابطه زیر سنجیده می شود:

$$\begin{aligned} \omega_k &= \omega_b (\omega_h / \omega_b)^{\frac{k+N+\frac{1}{2}(1+\alpha)}{2N+1}} \\ \omega'_k &= \omega_b (\omega_h / \omega_b)^{\frac{k+N+\frac{1}{2}(1-\alpha)}{2N+1}} \\ K &= \omega_h^\alpha \end{aligned} \quad (24)$$

در معادلات (۲۳) و (۲۴)، α مرتبه انتگرالگیری و رتبه فیلتر $(2N+1)$ است. مطالعه حاضر شامل یک تقریب منطقی استالوپ مرتبه پنجم برای اعضای مرتبه کسری با برد تناوبی $\omega \in \{10^{-2}, 10^2\}$ است ([3], [6]).

۴. نتایج عددی

سیستم (۱۸) با مرتبه متناسب $q_1 = q_2 = q_3 = q = 0.9$ شبیه سازی شده است. شرایط اولیه $\{x_0, y_0, z_0\}$ در سیستم به صورت $\{2, -1, 1\}$ انتخاب شده اند. شکل (3) مجموعه جواب های بدست آمده از الگوریتم ژنتیک را نشان می دهد. هر یک از نقاط یک انتخاب

² Oustaloup

منحصربفرد از تابع های کنترل فعال در (۱۷) را نشان می دهد که سه الگوریتم مختلف بهینه سازی چندهدفه^۳ را استفاده می کند. دو محور اهداف J_1 و J_2 متضاد، همگام سازی سریع را تعیین می کنند و تلاش کنترلگر را پایین می آورند. می توان مشاهده کرد که هر یک از آن جوابها، مقادیر متفاوتی از اهداف J_1 و J_2 را بدست می آورند. این نقاط نامغلوب می باشند به این معنی است که امکان ندارد مجموعه نقاط دیگری که توسط آن بهبود عملکرد در هر دو هدف نتیجه شود، پیدا شود. انتخاب همه ی جوابهای گزارش شده در این مقاله مبنی بر یک بازه زمانی متناهی 50 واحد زمانی هستند.

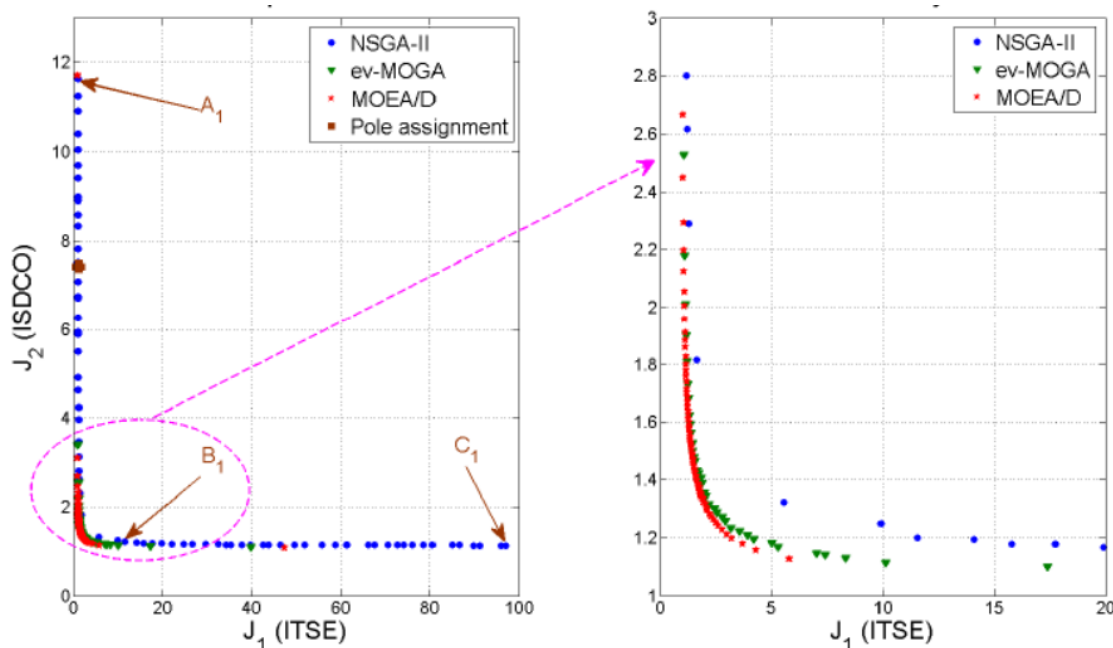
مجموعه جوابهای نماینده از جبهه پارتو در جدول (1) نشان داده شده است. این جوابها، جوابی در کران پایانی جبهه پارتو و جواب میانی هستند. جدول (1) مقادیر عددی ضرایب تابع کنترل فعال در (۱۷) همراه با مقادیر اهداف متمایز شبیه داده شده در (25) و (۲۶) را گزارش می دهد.

$$J_1 = \text{ISTE}_{\text{Set-Point}} = \int_{\psi}^{\infty} te_{sp}^2(t)dt \quad (25)$$

$$J_2 = \text{ISDCO} = \int_{\psi}^{\infty} (u(t) - u_{ss})^2 dt \quad (26)$$

که ψ ، زمانی که کنترل سیگنال استفاده شود، موارد زمانی را نمایش می دهد. خطای سیگنال را نمایش می دهد که همان خطای مسیر آشوبناک از نقطه تنظیم مورد نظراست.

به منظور مقایسه کردن سه نقطه منتخب A_1, B_1, C_1 (برای هر دو سیستم های رتبه ی متناسب و نامتناسب) که توسط صدق کردن در معیار پایداری متیگ^۴ نون بدست آمده اند ([9])، آرگومان ریشه های سیستم کنترل شده (کوچکترین دورریشه اصلی) که در جدول (2) نشان داده شده اند، در ناحیه پایدار صفحه ریمان اولیه قرار می گیرند ([5]). شکل (4) زمان سیر حوزه تکاملی حالات سیستم آشوبناک همراه با کنترل ورودی در دومین حالت u_2 را نشان می دهد.



شکل ۳. جبهه بهینه پارتو برای سیستم مالی کسری مرتبه متناسب

³ Multi Objective Optimazition

⁴ Matignon

جدول ۱. نمایش راه حل ها روی جبهه پارتو برای سیستم مالی مرتبه کسری متناسب و نامتناسب

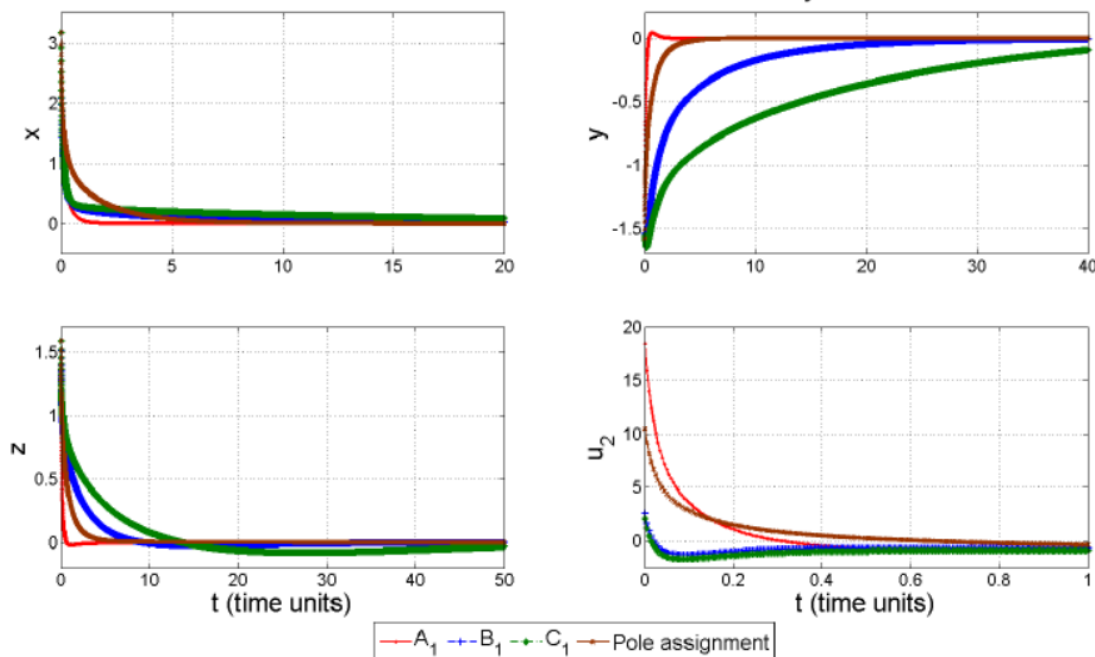
Class of FO model	Solution points	I_1	I_2	m_{11}	m_{12}	m_{13}	m_{21}	m_{22}	m_{23}	m_{31}	m_{32}	m_{33}
Commensurate	A_1	1.005	11.627	2.30 0	0.60 7	1.63 3	1.35 7	2.13 3	1.04 1	0.66 3	0.81 8	0.12 9
	B_1	9.921	1.248	2.04 9	0.90 2	0.70 8	2.41 2	0.74 7	0.00 0	0.57 2	0.03 3	0.75 7
	C_1	97.152	1.125	2.04 4	0.94 8	0.58 3	2.44 9	0.54 3	0.04 9	0.64 9	0.03 8	0.89 7
Incommensurate	A_2	1.001	15.995	4.99 9	0.01 8	3.31 2	3.25 9	4.88 0	0.35 7	0.95 9	4.93 4	0.92 0
	B_2	2.224	1.477	3.12 4	0.18 8	2.25 1	0.62 5	0.44 5	1.67 3	0.51 7	0.21 4	1.25 0
	C_2	38.298	1.053	2.97 5	0.48 5	1.83 8	1.08 9	0.25 5	1.92 5	1.80 3	0.41 3	1.38 5

جدول ۲: پایداری تضمین شده برای سه راه حل ها روی جبهه بهینه پارتو برای دو نمونه از سیستم مالی مرتبه کسری

Class of FO model	Stability region (in degrees)	Solution Points	Argument of the eigen-values of P (in degrees) lying in the primary Riemann sheet	
Commensurate order $q = 0.85$	$q\pi/2 = 81$	A_1	81.0756	-81.0756
		B_1	83.289	-83.289
		C_1	81.1305	-81.1305
Incommensurate orders $q_1 = 0.9, q_2 = 0.95, q_3 = 0.8$	$\pi/2m = 4.5$	A_2	-8.3496	8.3496
		B_2	-7.1514	7.1514
		C_2	6.1084	-6.1084

در همه موارد، زمان حوزه عملکرد حالت دوم و تلاش کنترلگر مورد نیاز در حالت دوم در تابع هدفهای معادلات (25) و (۲۶)، شبیه آنچه در [8] آمده است، در نظر گرفته شده است. زمانی که از شکل (4) می توان مشاهده کرد که متغیر حالت y ، به طور خیلی سریع، نقطه تعادل در جواب A_1 را معین می کند ([4]). این توسط جواب B_1 دنبال شده است و جواب C_1 کندترین در میان هر سه تاست و یک زمان طولانی برای رسیدن به تعادل را صرف می کند. بنابراین تا وقتی که زمان حوزه عملکرد هدف را در نظر می گیریم جواب A_1 بهترین و جواب C_1 بدترین است. می توان مشاهده کرد که جواب A_1 به یک دامنه بزرگی از سیگنال کنترل نسبت به راه حل های B_1 و C_1 نیاز دارد. در مورد جهان حقیقی متغیر دستی یا تلاش کنترلگر باید به کوچک ترین مقدار ممکن برسد. همانطوریکه تغییرات بزرگ در متغیر دستی شاید باعث شوک جسمی به سیستم و یا اعمال آن برای قیدهای دیگر ممکن نباشد. بنابراین وقتی که هدف را کوچکترین سیگنال کنترل در نظر می گیریم جواب C_1 بهترین و

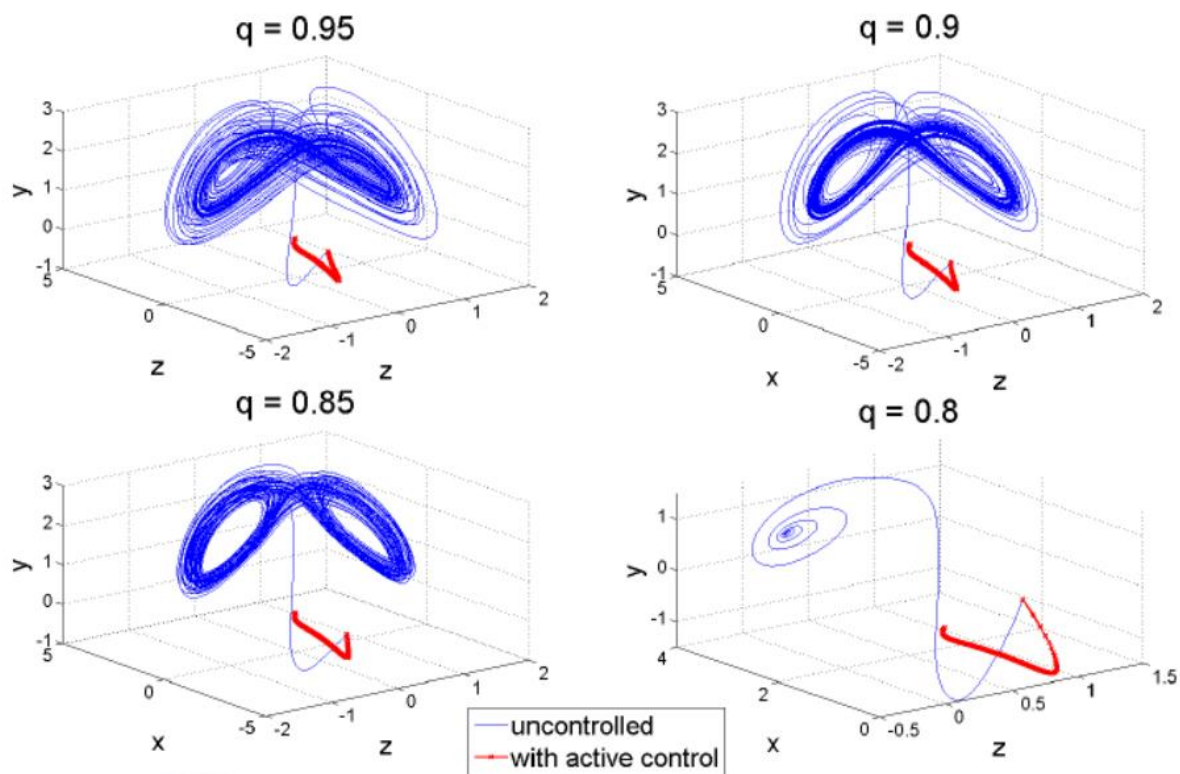
جواب A_1 بدترین است. رفتار آشوبناک برای برخی از مراتب کسری $\{q_1, q_2, q_3\}$ و معادله دیفرانسیل (۱۹) رخ می دهد. به منظور کنترل رفتار آشوبناک مقادیری $q_1 = q_2 = q_3 = 0.8$ در نظر گرفته شده است که سیستم رفتار آشوبناک داشته باشد ([2]).



شکل ۴. کنترل سیستم آشوبناک با نمایش راه حل ها روی جبهه ی پارتو برای سیستم مالی مرتبه کسری متناسب

به منظور نشان دادن عمومیت روش که برای سیستم های مرتبه کسری دیگر با همین ساختار و ضرایب به این صورت عمل کرده ایم. که

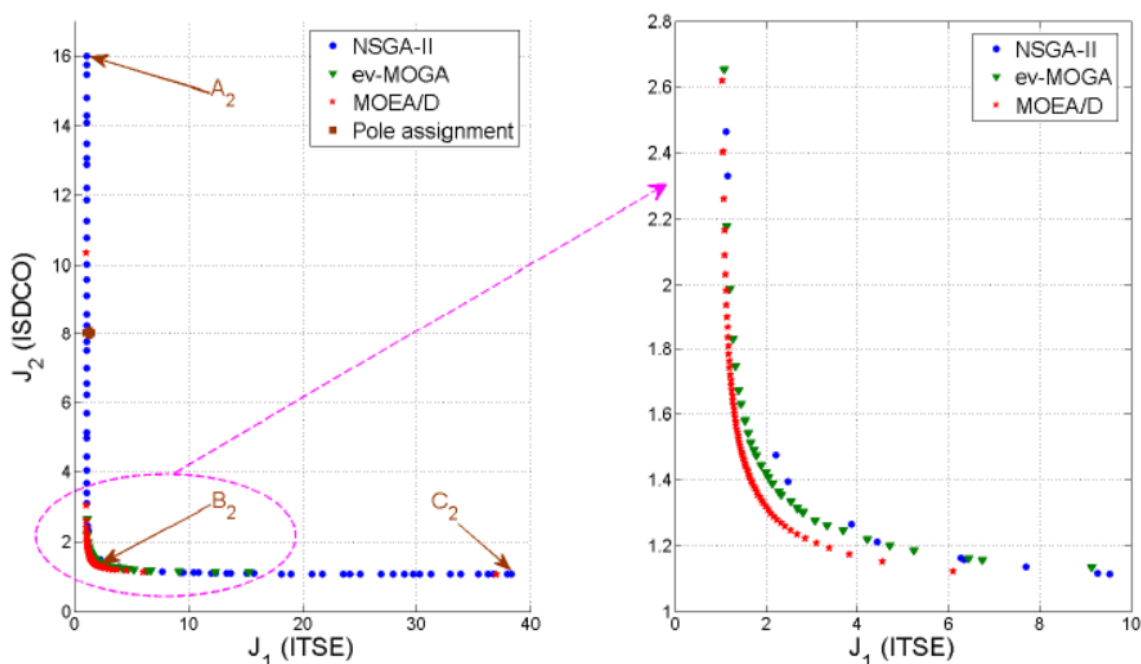
مراتب مشتق کسری را برای سیستم های متناسب و یا نامتناسب به تدریج کاهش داده ایم. نتایج نشان می دهد که برای $q = 0.8$ در سیستم های متناسب مرتبه کسری رفتار آشوبناک از بین می رود. به وضوح از شکل (5) مشخص می شود که پارامترهای کنترلگر مشابه (جواب میانه روی جبهه پارتو) می تواند به خوبی مانع نوسان آشوبناک برای مقادیر دیگر رتبه های مالی متناسب شود. همچنین شرایط پایداری آنالیزی در این مورد صدق می کند.



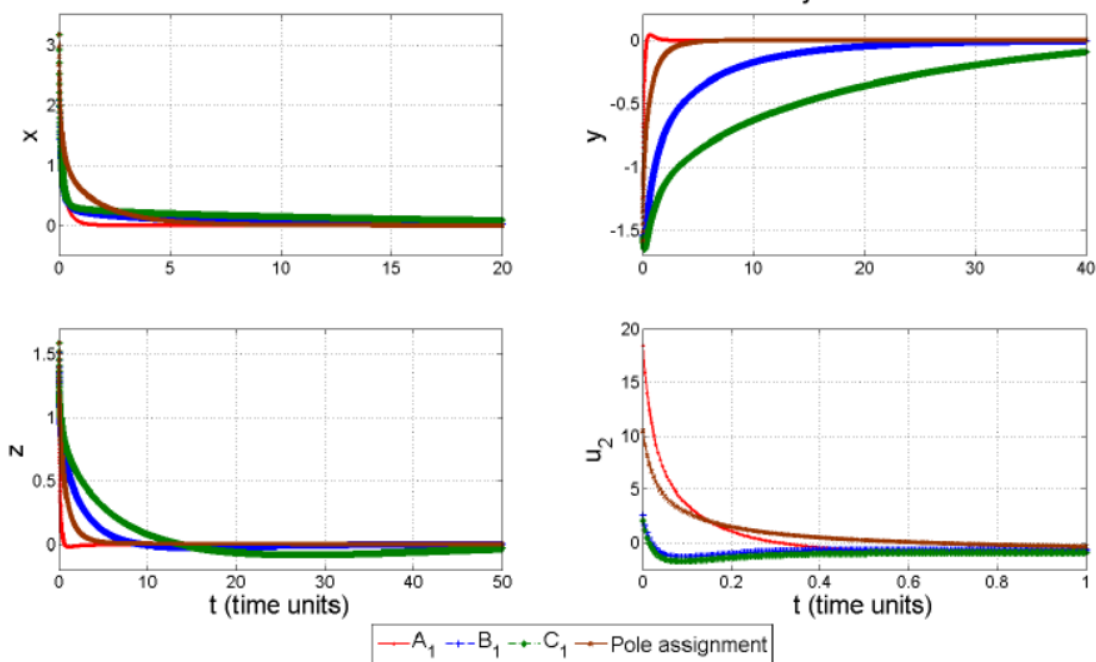
شکل ۵. تصویر فاز کنترل شده و کنترل نشده برای تغییرات در سیستم کسری مالی مرتبه کسری متناسب با راه حل میانه B_1

سیستم (۱۸) بارتبه نامتناسب $q_1 = 0.9, q_2 = 0.95, q_3 = 0.8$ شبیه سازی شده است. شرایط اولیه $\{x_0, y_0, z_0\}$ به

صورت $\{2, -1, 1\}$ انتخاب شده اند. شکل (6) جواب های بهینه پارتو برای مورد مرتبه نامتناسب را نشان می دهد. سه جواب پارتو روی جبهه های پارتو (یکی از کران های انتهایی و جواب های میانه در جدول (1) گزارش شده است و متناظرشان زمان حوزه عملکرد در شکل (7) نشان داده شده است. در میان دو جبهه های پارتو در شکل (6) و (3)، می توان مشاهده کرد که وسعت جبهه پارتو برای مورد رتبه نامتناسب بزرگتر است. زمانی که مراتب مشتقات کسری متفاوت است، دامنه تغییرات تابع کنترل وسیع تر خواهد بود و انتخاب های بیشتری درجبهه پارتو خواهیم داشت.



شکل ۶. جبهه پارتو برای سیستم مالی مرتبه کسری

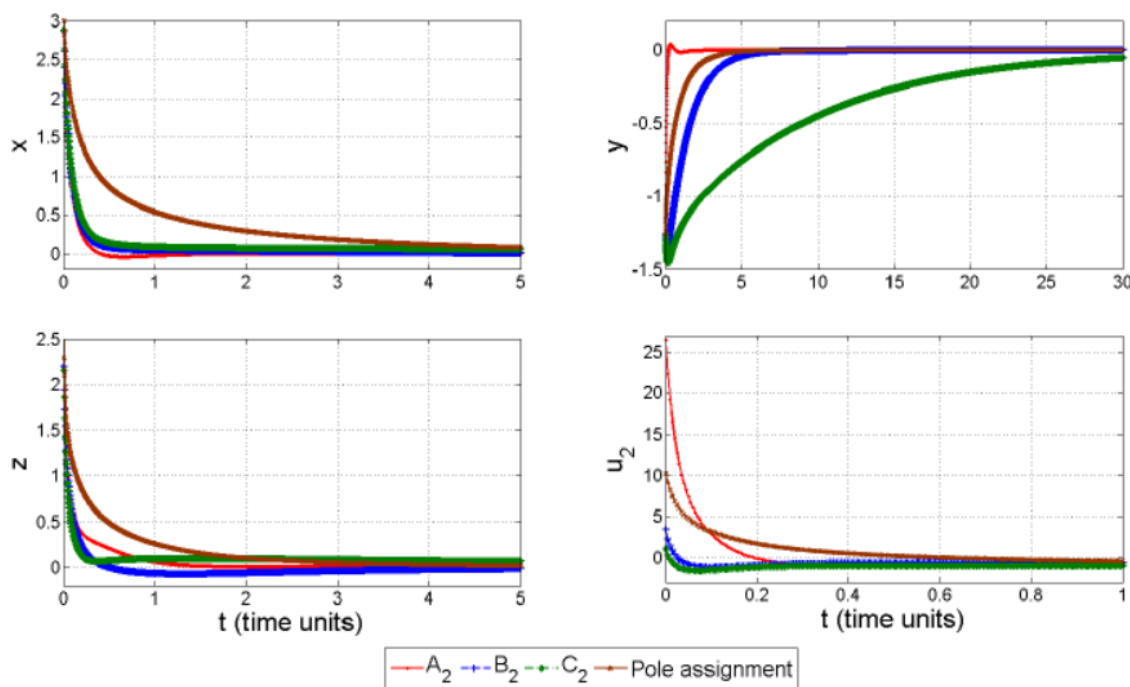


شکل ۷. کنترل آشوبناک با نمایش راه حل ها روی جبهه پارتو برای سیستم مالی مرتبه کسری نامتناسب

برای هر دو سیستم های مالی مرتبه کسری متناسب و نامتناسب، جبهه های پارتو با استفاده از سه الگوریتم های چندهدفه به نام های NSGA-II، MOEA/D و ev-MOGA به ترتیب در شکل (3) و (6) نشان داده شده است ([4]). مقایسه سه تا الگوریتم های بهینه سازی چندهدفه نشان می دهد که NSGA-II، بزرگترین جبهه پارتو را نسبت به MOEA/D و ev-MOGA دارد. اما یک جبهه پارتو نامغلوب بهتر (اگر چه کوتاهتر) می تواند با استفاده از MOEA/D بدست آید.

به منظور گرفتن یک پهنه ی گوناگون از جوابها، شبیه یک طراحی تجارت موفق، باید نتایج با یک جبهه پارتو بزرگتر را در نظر گرفت. ما در اینجا حوزه زمانی جواب بدتر، بهتر و جوابهای میانه جبهه ی پارتو را بوسیله ی دو اهداف کنترل گزارش می دهیم. در صورتی که اولویت هایی برای تابع کنترل در نظر گرفته شود، می توان جستجوهای مشابهی را روی مرز پارتو انجام داد. این عمل باعث کوچکتر شدن ناحیه پارتو می گردد. ماهیت جوابها می تواند توسط شکل (6) تشخیص داده شود. آن در ادامه بوسیله حوزه زمانی معادل حالات سیستم آشفته تحت فعالیت کنترل کننده های مختلف در شکل (7) برگردانده شده است. تفاسیر نتایج شبیه به مورد مرتبه متناسب هستند. می توان در شکل (7) مشاهده کرد که حالت y سریعترین نقطه تعادل در جواب A_2 را معین می کند ([4]). این توسط جوابهای B_2 و C_2 دنبال شده است. در عوض جواب C_2 در حال ارائه کندترین واکنش است. به هر حال تلاش کنترل مورد نیاز برای حالت y کمترین مقدار برای جواب C_2 و بیشترین مقدار برای جواب A_2 است. برخلاف B_2 که در حال قرار گرفتن بین این دو مورد است.

سیستم مرتبه کسری نامتناسب آشوبناک با مراتب $q_1 = 0.9, q_2 = 0.95, q_3 = 0.8$ را در نظر می گیریم. به طور جداگانه یکی از مراتب کسری را کاهش داده و دو مرتبه دیگر را ثابت نگه می داریم. نتایج نشان می دهد زمانی که به طور جداگانه $q_1 < 0.8, q_2 < 0.85, q_3 < 0.5$ باشد حالت آشوبناک سیستم از بین رفته و سیستم بنابر قضیه متیگ نون^۵ ([9]) پایدار می شود. اگر کنترل بهتر بدست آمده برای سیستم نامتناسب $q_1 = 0.9, q_2 = 0.95, q_3 = 0.8$ را در نظر گرفته و تغییراتی در مراتب سیستم دهیم، نتایج نشان می دهند که کنترل برای سیستم جدید نیز به صورت درست عمل کرده و آشوب را از بین می برد اما کنترل حاضر بهینه پارتو نمی باشد.



شکل ۸. تصویر فاز کنترل شده فعال و غیر فعال برای کاهش تدریجی در رتبه های سیستم مالی مرتبه کسری نامتناسب از مقادیر صوری

$q_1 = 0.9, q_2 = 0.95, q_3 = 0.8$ باراه حل میانه B_2 روی جبهه پارتو

نتیجه گیری و کارهای بیشتر

در این مقاله مروری بر یک سیاست کنترل فعال برای یک سیستم مالی آشوبناک معرفی شده است. روش مورد بررسی، پایداری تضمین شده ای را برای هردوسیستم مالی مرتبه کسری متناسب و نامتناسب نتیجه می دهد. تابع های کنترل فعال با استفاده از سه الگوریتم های تکاملی چندهدفه MOEA/D، NSGA-II و ev-MOGA با دو هدف مینیمم تابع کنترل و پایداری سریع سیستم تحت بررسی بدست آمده است.

مقایسه سه الگوریتم های تکاملی بهینه سازی چندهدفه نشان می دهد که الگوریتم NSGA-II، بزرگترین جبهه پارتو را نسبت به الگوریتم ev-MOGA و MOEA/D را ارائه می دهد اما یک جبهه پارتو نامغلوب بهتر (اگرچه کوتاهتر) می تواند با استفاده از الگوریتم MOEA/D بدست آید. این نشان می دهد که اهداف طراحی شده نمی توانند همزمان با استفاده از یک کنترلگر مخصوص مینیمم شده باشند. مجموعه ای از جواب های بهینه پارتو وجود دارد که مقدار تابع هدف در یک مورد بهتر از مقادیر دیگر توابع هدف است. بنابراین طراح می تواند یک کنترلگر خاص از آن مجموعه راه حل های نامغلوب برطبق موضوع خاص مورد نیازش را انتخاب کند. نتایج عددی نشان می دهد هنگامی مراتب مشتقات کسری کاهش یابد رفتار سیستم از حالت آشوبناک خارج و پایدار می گردد. پیشنهاد می شود وجود این گونه مدل ها در سیستم مالی ایران از جمله بورس و نوسانات نرخ ارز بررسی شود. علاوه بر این روش برای مطالعه سیستم های پیچیده زمانی که بعضی عناصر آن رفتار تصادفی و فازی دارند، توسعه داده شود. این سیستم ها از لحاظ مدلسازی پیچیده ترمی باشند.

منابع و مراجع

- [1] R. Chandra, SH. Chand, 2008. "Evaluation of co-evolutionary neural network architectures for time series prediction with mobile application in finance, "Applied soft computing , pp. 462-473, 2016.
 - [2] W.C.Chen, 2008. "Non linear dynamics and chaos in a fractionl-order financial system, "Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 36,No. 5, pp. 1305-1314.
 - [3] Y. Chen, 2015. "Oustaloup-recursive-approximation for fractional order differentiators. "2003. [Online].
 - [4] I. Pan, S. Das and S. Das , 2015. "Multi-Objective Active Control Policy Design for Commensurate and Incommensurate Fractional Order Chaotic Financial Systems, "Applied Mathematical Modeling, Vol 39, pp. 500-514.
 - [5] S. Das, 2011. "Functional fractional calculus, "Springer, Berlin.
 - [6] H. Yu, G. Cai, and Y. Li, 2012. "Dynamic analysis and control of a new hyperchaotic finance system, "Nonlinear Dynamics, Vol. 67, No. 3,pp. 2171-2182.
 - [7] A. Oustaloup, F. Levron, B. Mathieu, and F. M. Nanot, 2000. "Frequency-band complex noninteger differentiator. Characterization and synthesis, "Circuits and Systems I:Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on, Vol .47, No. 1,pp. 25-39.
 - [8] I. Pan, A. Korre, S. Das, and S. Durucan, 2012. "Chaos suppression in a fractional order financial system using intelligent regrouping PSO based fractional fuzzy control policy in the presence of fractional Gaussian noise,"Nonlinear Dynamics, Vol. 70, No. 4,pp. 2445-2461.
 - [9] I. Petras, 2011. "Fractional-order nonlinear systems:modeling, analysis and simulation, "Berline, Springer.
 - [10] J. M. Pereira, M. Basto; A. F.Silva, 2016. "the logistic lasso and ridge regression inpredicting corporate failure," Procedia Economics and Finance 39, pp.634-641.
- [۱۱] زمانی، م، افسر، ا، ثقفی نژاد، سید و، بیات، ا، زمستان ۱۳۹۳. "سیستم خبره پیش بینی قیمت سهام و بهینه سازی سبد سهام با استفاده از شبکه های عصبی فازی، مدل سازی فازی و الگوریتم ژنتیک"، مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، شماره بیست و یکم، صفحه ۱۳۰ - ۱۰۷، فصل نامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار.
- [۱۲] شاهرخی، سیده س، بهمن ۱۳۹۴. طراحی و تدوین مدلی برای رتبه بندی اعتباری شرکتها، رساله دکتری دانشگاه الزهرا.
- [۱۳] صالحی، ف، صالحی، م، جعفری اسکندری، م، تابستان ۱۳۹۳. "بهینه سازی سبد تسهیلات اعطایی موسسات مالی با استفاده از برنامه ریزی ریاضی و الگوریتم ژنتیک"، سال دوم، شماره ۳، صفحه 1-22، فصل نامه توسعه مدیریت پولی و بانکی.
- [۱۴] صفرزاده، ا، شهریور ۱۳۹۳. بررسی پدیده آشوب درسیستم های پویای مرتبه کسری با تاخیر زمانی، دانشگاه دامغان، دامغان، صفحه ۱۰۹ - ۱.
- [۱۵] طباطبایی، سید م. . "۱۳۹۳ پیاده سازی و نقش الگوریتم فراکاوشی بهینه سازی تراکم ذرات (PSO) در مدیریت و حفاظت منابع آب و محیط زیست"، سیویلیکا-ناشر تخصصی مقالات کنفرانس ها و ژورنالها، صفحه ۱۱-۱، کنفرانس بین المللی و آنلاین اقتصاد سبز.
- [۱۶] ملک پور، ه، شیرویه زاد، ه، شهریور ۱۳۹۲، "ارزیابی عملکرد و رتبه بندی درون سازمانی با استفاده از تحلیل پوششی داده ها، مورد مطالعه بانک قوامین خرم آباد شعبه امام خمینی (ره)"، پنجمین کنفرانس ملی تحلیل پوششی داده ها، صفحه ۲-۱.